Université Nangui Abrogoua **République de Côte d'Ivoire**

Licence 1 : Mathématiques - Informatique **Année Universitaire : 2020/2021**

Corrigé de l'examen d'Analyse 3 (Session 1)

ECUE : Développement en série

Durée : 1 heure 15

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les deux exercices sont indépendants.
Une attention particulière devra être apportée à la rédaction qui sera un élément important d'appréciation.

EXERCICE 1:

On considère la série entière réelle définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière ci-dessus. Puis étudier la convergence pour $x = R$ et $x = -R$.

2. Soit la série entière définie par $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

   a. Déterminer le rayon de convergence R' de la série entière g

   b. Calculer pour tout $x \in]-R', R'[$, l'expression de $g'(x)$ puis celle de $g(x)$.

3. a. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $f(x) = \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

   b. En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$.

1. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n$.

1 pt – Rayon de Convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n$: Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{2n+1}{2n+3}\right| = 1.$$

donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n$ est $R = 1$.

0,5 pt – Convergence de la série pour $x = -1$: La série devient $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$ qui harmonique et divergente.

0,5 pt – Convergence de la série pour $x = 1$: La série devient $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ qui alternée et qui vérifie le critère spécial des séries alternées, donc convergente.

2. Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

1,5pt a Déterminons le rayon de convergence R' de la série g :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (x^2)^n$. Donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ converge si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (x^2)^n$ converge c'est-à-dire si et seulement si $x^2 < 1$. D'où la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ converge si et seulement si $|x| < 1$. Par conséquent le rayon de convergence de la la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ est $R' = 1$. (On peut aussi utiliser la règle de D'Alembert)

b Calculons pour tout $x \in]-1, 1[$, les expression de $g'(x)$ et de $g(x)$: Soit $x \in]-1, 1[$. On a $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.
Par dérivation, on abtient,

1,5pt

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}.$$

Comme $g(0) = 0$, on a

1 pt

$$g(x) = \int_0^x g'(t)\mathrm{d}t == \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^x = \arctan(x).$$

3 a Montrons que $f(x) = \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ pour tout $x \in]0, 1[$: Soit $x \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} ((\sqrt{x})^2)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{x})^{2n+1} \end{aligned}$$

1,5pt

$$f(x) = \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

b Donnons l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$: Par la question 3a et la question 2b, on déduit que pour tout $x \in]0, 1[$:

0,5 pt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan(\sqrt{x}).$$

EXERCICE 2:

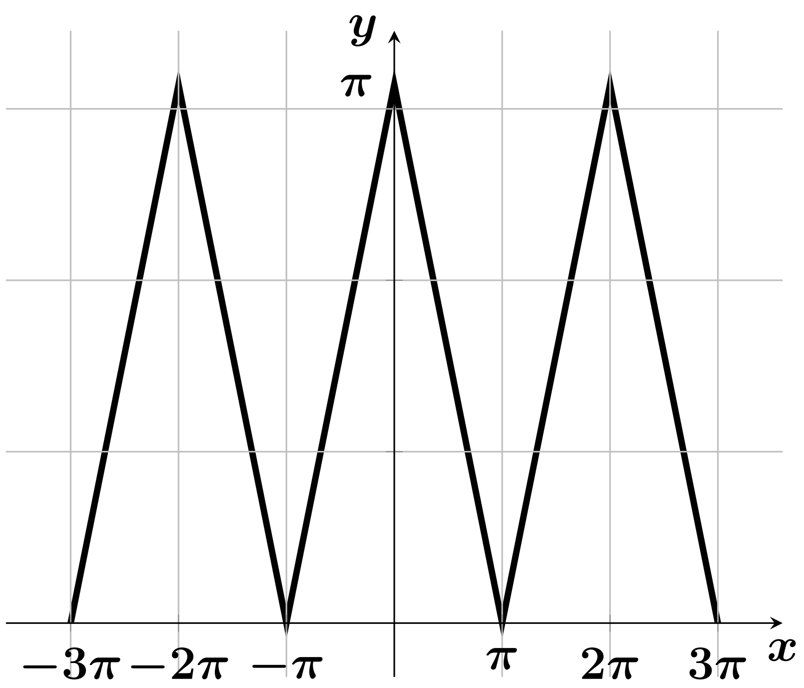
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique et paire telle que :

$$f(x) = \pi - x \quad \text{pour tout } x \in [0, \pi]$$

1. Représenter le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Justifier que la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.
3. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$.
5. Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.
6. En déduire les sommes : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$.

1. Représentation graphique de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

1,5pt



2. Convergence normale de la série de Fourier de f :

0,5pt Le graphe ou une étude simple permet de voir que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

3. Calcul des coefficients de Fourier : la fonction f étant paire, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = 0 \quad \text{et} \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x.$$

– Calcul de a_0

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\pi x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} \\
a_0 &= \pi.
\end{aligned}
$$

1,5pt

– Calcul de a_n pour $n \geq 1$. Par une intégration par parties, on a :

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\underbrace{\left[\frac{(\pi - x)}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi n}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi n^2}(1 - \cos(n\pi)) \\
a_n &= \frac{2}{\pi n^2}(1 - (-1)^n).
\end{aligned}
$$

2 pts On peut écrire a_n sous la forme $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \dfrac{4}{\pi(2k+1)^2} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$

(4) <u>Déduisons que pour tout</u> $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$:

La série de Fourier de la fonction f s'écrit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $SF_f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$.

0,5 pt On sait d'après la question 4, que la série de Fourier de f converge vers f, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $SF_f(x) = f(x)$ c'est-à-dire $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$.

(5) – <u>Calcul $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$</u> : Pour $x = 0$, on a

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos(0)}{(2k+1)^2} \\
\pi &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \\
\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}
$$

1 pt

– <u>Calcul $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$</u> : En utilisant la formule de Parseval, on a

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}.\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\mathrm{d}x \\
\frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x))^2\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$\frac{\pi^2}{4}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\pi)^2\mathrm{d}x$$
$$\frac{\pi^2}{4}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}t^2\mathrm{d}t$$
$$\frac{\pi^2}{4}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-\pi}^{0}$$
$$\frac{\pi^2}{4}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^2}{3}$$

2 pts

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

6 – Calcul $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$: On a

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{4}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

1,5 pt

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

– Calcul $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}$: Comme précédemment, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^4}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$
$$=\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{16}{15}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

1,5 pt

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$